

## 淺談學生在「分數乘法」不同的解題策略

新北市土城區安和國民小學教師 陳玉珊

## 壹、前言

我發現透過文章的敘寫，是一種可以用來訓練自己分析教學能力的方式，雖然分析這些資料的過程很辛苦，但卻可以幫助自己的教學更精進、用更寬廣的視野看待學生的學習表現，真的很值得，所以我很珍惜這樣的訓練方式。本文的重點聚焦在學生對於「分數乘法比大小」這一類型的題目，展現了三種不同層次的解題策略。題目如下：

請在□裡填入>、<或=。

$$(1) \frac{6}{5} \times \frac{4}{7} \square \frac{6}{5}$$

$$(2) 2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6} \square 2\frac{1}{3}$$

$$(3) \frac{8}{15} \times 1 \square \frac{8}{15}$$

## 貳、學生不同的解題策略

## 一、透過計算，比大小

在課堂中，班上有少數幾位學生，對於這三道題目的解題方式，是透過計算將答案算出來之後再進行比較，其計算過程如下。

$$(1) \frac{6}{5} \times \frac{4}{7} \square \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{24}{35}, \frac{6 \times 7}{5 \times 7} = \frac{42}{35}$$

$$\text{因為 } \frac{24}{35} < \frac{42}{35}, \text{ 所以 } \frac{6}{5} \times \frac{4}{7} < \frac{6}{5}$$

$$(2) 2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6} \square 2\frac{1}{3}$$

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \frac{7}{3} \times \frac{77}{6} = \frac{539}{18} = 29\frac{17}{18}$$

$$\text{因為 } 29\frac{17}{18} > 2\frac{1}{3}, \text{ 所以 } 2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6} > 2\frac{1}{3}$$

## 二、利用乘數&lt;1、&gt;1、=1的關係，比大小

由於在「分數的計算」單元中的教學活

動四：關係，其教學目標是希望學生能夠利用乘數<1、>1、=1來判斷乘積與被乘數之間的大小關係時，如圖1。

| 被乘數、乘數和積的關係     |
|-----------------|
| (1) 當乘數<1，積<被乘數 |
| (2) 當乘數=1，積=被乘數 |
| (3) 當乘數>1，積>被乘數 |

圖1 被乘數、乘數和積的關係

因此，班上絕大多數的同學都是透過「教學活動四：關係」的方式來比較大小，學生的說明如下：

$$(1) \frac{6}{5} \times \frac{4}{7} \square \frac{6}{5}$$

S2：「如果乘數小於1，那麼乘出來的結果就會比原來的數還要小，因為 $\frac{4}{7}$ 比1還要小，所以 $\frac{6}{5} \times \frac{4}{7}$ 乘出來的答案會小於 $\frac{6}{5}$ ...」

$$(2) 2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6} \square 2\frac{1}{3}$$

S6：「如果乘數大於1，那麼乘出來的結果就會比原來的數還要大，因為 $\frac{77}{6}$ 比1還要大，所以 $2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6}$ 乘出來的答案會大於 $2\frac{1}{3}$ ...」

$$(3) \frac{8}{15} \times 1 \square \frac{8}{15}$$

S22：「如果乘數等於1，那麼乘出來的結果就會是自己，所以 $\frac{8}{15} \times 1$ 等於 $\frac{8}{15}$ ...」

### 三、透過「轉換單位量」的概念來說明

除了上述兩種的解題策略，我發現有幾位學生能夠利用「轉換單位量」方式來進行概念性的說明，以下是學生討論的對話過程：

S23：「為什麼乘數比1大，乘積會大於被乘數？為什麼乘數比1小，乘積就會小於被乘數？」

1. 學生S10先說明「乘數=1，乘積=被乘數」的理由

S10：「 $\frac{8}{15} \times 1$ 的意思就是，有1個 $\frac{8}{15}$ 的意思，也就是 $\frac{8}{15}$ ，（意旨等號左邊為 $\frac{8}{15}$ ，而這邊（等號右邊）也是 $\frac{8}{15}$ ，兩邊都是 $\frac{8}{15}$ ，所以一樣大，□裡要填=」

2. 學生S16再來說明「乘數<1，乘積<被乘數」的理由

S16：「 $\frac{6}{5} \times \frac{4}{7}$ 的意思，是指 $\frac{6}{5}$ 的 $\frac{4}{7}$ 倍，也就是說先把 $\frac{6}{5}$ 當作1，平分7等份，取其中的4等份，因為 $\frac{7}{7} = 1$ ，要取7等份才會是原來的 $\frac{6}{5}$ ，而我現在只有取4等份而已，會比原來的還要少，答案會變小，所以 $\frac{6}{5} \times \frac{4}{7} < \frac{6}{5}$ 。」

3. 學生S9最後說明「乘數>1，乘積>被乘數」的理由

S9：「 $2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6}$ 的意思，就是 $2\frac{1}{3}$ 的 $\frac{77}{6}$ 倍，也就是說先把 $2\frac{1}{3}$ 當作1，平分6等份，因為只要取6等份，就會跟原來的 $2\frac{1}{3}$ 一樣大，可是現在有77等份，當然會比原來的還要大，所以 $2\frac{1}{3} \times \frac{77}{6} > 2\frac{1}{3}$ 。」

### 參、結論

英國數學教育理論學家Skemp (1976)在他著名論文《關係性瞭解與工具性瞭解》(Relational understanding and instrumental understanding)中提到，「關係性瞭解」指的是理解解題方式之原因與脈絡進行解題，「工具性瞭解」則是不懂解題方式之原因與脈絡、單純用背誦的公式進行解題。在關係性瞭解下學到的是較有數學感的關係性數學，工具性瞭解學習到的是無數學感的工具性數學(Skemp, 1976)，由此可知，數學課室的教學應強調概念性知識的理解。為此，我將學生不同的解題策略分成三個層次，說明如下：

#### 一、層次一：「程序性知識」的精熟

數學的理解原本就比較吃力的學生，他們會為了避免太多種解題策略而造成自己的思緒紊亂，最安全的方法就是採用「計算」的方式來進行解題，由於這是單純用計算公式來進行機械式的解題，因此，我將此解題策略定義在層次一：屬於「程序性知識」的精熟。

#### 二、層次二：「概念性知識」的初步理解

由於本單元的教學活動四「關係」，就是希望學生能夠利用乘數<1、>1、=1來判斷乘積與被乘數之間孰大孰小？能夠學會運用本單元新習得到的知識來進行解題，我認為學生這樣的表現比層次一的學生有較高層次的表現，因此，我將此解題策略定義在層次二：已具備初步「概念性知識」的理解。

#### 三、層次三：「概念性知識」的深入理解

由於呂玉琴(1996)提到，單位量指認是解分數問題中一個極重要的關鍵，當學生能夠清楚的將單位量說出來：將被乘數（單位量）當作整體量1，乘數為其倍數（單位數），倘若此時的乘數為分數時，其實是具有「除法（被切割）概念」的意涵在內，也就是再度回到分數的基本概念上，這樣的思維路徑其實是很難的，因此我將此解題策略

定義在層次三：對於分數乘法有「概念性知識」的理解。

### 肆、自我省思

看到學生能夠出現三種不同層次的解題策略，實在是讓我感到興奮不已，尤其當學生能夠針對其他同學回應主動提出疑惑時，正如我們平常希望學生能夠「知其然，而知其所以然」；沒想到只是一題再普通不過的「分數乘法比較大小」問題，學生竟然可以產生三種不同層次的解題思維，甚至還觸發了學生在「連結舊經驗」上的成長，充分連結到曾經學過「分數基本概念」與「乘法概念」的舊經驗，引發對學習的興趣，繼續想下去，直到想出來的那一刻，這是身為數學教師的我，最想要看到的學生表現！

### 參考文獻

- 呂玉琴（1996）。國小教師的分數知識。臺北師院學報，9，427-460。
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.