

伸展跳躍Jump題的設計與教學

新北市中和區秀山國民小學校長 張文斌

老師教學創新，不只是在創新教學，而是在追求學生的有效學習。學生學習如何有效？更是老師教學創新必須考慮的一個重點。黃郁倫（譯）（2013）（原作者：佐藤學）的學習共同體已在臺灣歷經5年多的發展，學習共同體也不是座位排成口字型、或是讓學生進行討論就可完成，而是一樣有在要求學生的學習是否達成。因此，佐藤學除提倡以協同學習為基礎的課堂改革，並指出伸展跳躍的學習，是學習成立的其中一個條件。因為協同學習不僅可有效回復成績低下學生的學力，更可保障高學力學生挑戰更高程度學習的機會；而這種向更高程度挑戰的課題，就是伸展跳躍Jump的學習。

伸展跳躍Jump的學習，不是直接植基在課堂當中，而是先以教科書程度設計每一個人都可以理解的「共有課題」後，再設計以共有課題的理解為基礎，超越教科書以上程度的「伸展跳躍課題」。當全班學生都能完成「伸展跳躍課題」後，就表示課程內容的程度設定太低了！佐藤學希望課堂結束後僅有一半或三分之一的學生能完成「伸展跳躍的課題」，如此才能讓學生面對「好像理解卻又不太明白」時，學生最能夠沉浸在學習的快樂（黃郁倫，2013）。此即與 von Glasersfeld（1991，引自林文生，2005）所言：「讓學生做有趣的思考，勝過千言萬語的讚美！」有異曲同工之妙。

以下乃就伸展跳躍Jump題的設計歷程與教學實踐做說明：

壹、重視學習成立的三個條件（圖1）

符合學科本質的學習才是真正的學習，如數學課追求數學式的思考及學習，國文課追求文學性的思考和學習，自然課則要採取探究性的學習，以透過觀察和實驗理解來構成原理。此即在追求符合每一學科或學習領域屬性的學

符合學科本質的學習

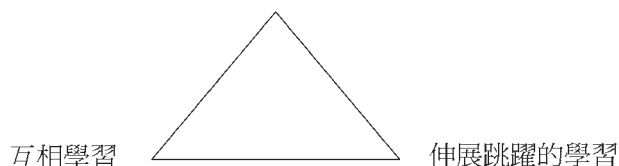


圖1 學習共同體學習成立的三條件

資料來源：修改自黃郁倫（譯）（2013）。學習共同體—構想與實踐（原作者：佐藤學）。臺北市：天下雜誌。

習特性與學科教學知識（Pedagogical Content Knowledge, PCK）（Shulman, 1987），而非用一種教學方法來教所有學科或領域。

互相學習的關係指的是透過互相討論，讓聽不懂的學生與聽得懂的學生互相幫忙，使「互惠關係」得以成立，形成「若無其事」、「互相聆聽」的溫柔關係。

伸展跳躍的課題應設定成教科書以上的程度，並取決於互相學習關係的成熟度，並透過維高斯基之近側發展區的理論，學習是透過他人及道具援助的「伸展及跳躍」，讓學生儘可能挑戰更高程度的課程（黃郁倫譯，2013）。因此，伸展跳躍Jump題的設計需建立在老師要能有符合學科本質的學習與建立相互聆聽的教室文化的基礎上，甚至是全班學生都已學會及理解教科書程度的共有課題後才進行伸展跳躍Jump題的學習，而非在第一堂課的第一分鐘就給學生Jump題的挑戰。

貳、進行數學單元教學的版本分析

為什麼要進行版本分析？因為每一家廠商雖有通過教育部的審查，雖然它是全國統一版，但它不一定能適合我自己學校的學生。因此再進行教學設計之前，我們一定會先閱讀課綱，掌握能力指標與單元目標，再進行同單元不同版本教科書的閱讀、比較與分析，瞭解不同版本在處理

數學概念建構的不同處理方式，以初步建構教學觀摩的教學設計，並成為共同備課與公開課的基礎。因為，我們不是在教教材，而是透過做數學（doing math）（黃郁倫、鐘啟泉譯，2012），建立數學概念的理解。

以下是周偉翔（2017）所進行速率單元三版本分析所使用的表格之部份內容（全部內容可詳其教學設計）

翰林(六下第3單元)	南一(六上第8單元)	康軒(六下第2單元)																														
<p>活動一：認識速率。</p> <table border="1"> <tr> <td>姓名</td> <td>小均</td> <td>小瑾</td> <td>小琪</td> <td>小松</td> </tr> <tr> <td>距離 (公尺)</td> <td>100</td> <td>100</td> <td>120</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>時間 (秒)</td> <td>20</td> <td>25</td> <td>24</td> <td>25</td> </tr> </table> <p>1-(1)小均和小瑾的車，誰跑得比較快？ 1-(2)小瑾和小松的車，誰跑得比較快？ 1-(3)小均和小琪的車，誰跑得比較快？ 2. 班馬跑180公尺花了10秒，平均每1秒跑了幾公尺？ 3. 林老師家到學校的距離是8000</p>	姓名	小均	小瑾	小琪	小松	距離 (公尺)	100	100	120	150	時間 (秒)	20	25	24	25	<p>活動一：時間換算。</p> <p>1. 150公尺賽跑，小強跑了22秒，小萱跑了1$\frac{1}{3}$分鐘，誰花的時間比較少？ 2. 小萱從家裡走到花園花了10分48秒，同樣的距離，小潔花了10.8分鐘，誰花的時間比較多？ 3. 5000公尺競走，小珍走完全程花了1小時20分，小華走完全程花了1又$\frac{7}{12}$小時，誰花的時間比較少？ 4. 從高雄騎自行車到墾丁，小健花了9小時15分，小行花了9.15小時，誰花的時間較多？</p> <p>活動二：秒速、分速、時速。</p>	<p>活動一：平均速率。</p> <table border="1"> <tr> <td>汽車</td> <td>甲</td> <td>乙</td> <td>丙</td> <td>丁</td> </tr> <tr> <td>距離 (km)</td> <td>200</td> <td>280</td> <td>250</td> <td>240</td> </tr> <tr> <td>時間 (hr)</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </table> <p>1-(1)甲車和乙車，哪一輛跑得比較快？ 1-(2)甲車和丙車，哪一輛跑得比較快？ 1-(3)甲車和丁車，哪一輛跑得比較快？ 1-(4)算算看，乙車和丙車的速率各是多少？ 2. 君豪全家要到澳洲 雪</p>	汽車	甲	乙	丙	丁	距離 (km)	200	280	250	240	時間 (hr)	4	5	4	3
姓名	小均	小瑾	小琪	小松																												
距離 (公尺)	100	100	120	150																												
時間 (秒)	20	25	24	25																												
汽車	甲	乙	丙	丁																												
距離 (km)	200	280	250	240																												
時間 (hr)	4	5	4	3																												

透過版本分析後，教學者可以從中發現三種版本設計的相同與不同，以及需要補足的教學重點，並可讓教學者思考伸展跳躍題目的方向，如教學者再版本分析後即考慮將「同時同地同方向問題」納入課程教學中，以刺激學生思考學習。

參、透過教學省思紀錄確認學生學習成果

伸展跳躍Jump題是以教科書共有課題所開展出來的挑戰題，因此，所有教學設計的佈題都是老師的教學設計的「假設」，學生數學概念是否理解取決於學生在解題歷程中的學習與互動，非老師把所有佈題教完，學生就一定學會。因此，教學者必須要有教學紀錄與教學省思，如此才能依據學生的學習狀況進行數學概念的奠基與深化，這樣的教學設計與佈題又變成「滾動式設計」的歷程模式，其課程設計模式與傳統目標模式不同。

以陳癸伶（2015）六年級分數的除法的教學為例，她在課前預定第一節課要上4題。但在

「一個披薩切了18片，全家吃掉12片，是吃了多少個披薩？」的第一題就因為全班16位同學只有13位同學列對式子，二位同學列成 $18 \div 12$ ，另一位同學則寫成 $1 - \frac{12}{18}$ ，老師因此多花時間用畫圖的方式來處理分數的概念；第二題「你能用約分的方法找出 $\frac{12}{18}$ 的等值分數嗎？這些等值分數哪一個不能再約分了？」老師發現同學在完成第一題時就已進行約分，追問學生為何要約分到 $\frac{2}{3}$ ？大部份學生說不出來，有學生說從2開始，老師再追問2是12的什麼？學生竟回答2是12的公因數，這也讓老師很訝異！學生對因數及公因數的概念並不清楚，因此老師又多花時間讓學生理解正確的因數及公因數概念，同時提醒 $\frac{2}{3}$ 最後只能用什麼數來除？讓學生導出兩數互質的概念，並再與學生討論真分數和最簡分數的概念。癸伶老師才上到這裡，就噹噹噹下課了！

所以癸伶老師在上完這一節課寫下後的省思是「本節進度落後，還有兩題未完成，挪至第二節上。」但在第二節課補上完第一課的後面三四題，還是沒辦法上完原本預定第二節課的三題佈題，只能再往後延到第三節課了！但這是為了學生能完成「共有課題」與分數除法的前置概念，倘這些前置概念沒辦理讓學生都鞏固，如何讓學生進行伸展跳躍的學習？因此，因應學生的學習狀況做課程設計的修改是必要的，也比較能符合學生真實的學習樣貌。

肆、設計伸展跳躍的Jump題鼓勵學生進行數學思考

學習共同體的協同學習能夠保障高學力學生挑戰更高程度學習的機會，也能讓低學力學生得到最大的學習效能，原因是學習共同體的兩個根基之一就是「共有課題」的理解為基礎，進而挑戰的「伸展跳躍的課題」，讓每一個學生能確實理解授課內容，並要承擔起主動學習與挑戰學習的責任。

如何創造讓學生進行有趣的思考，而不是千言萬語的讚美，更是我們在每一節課下課之前或

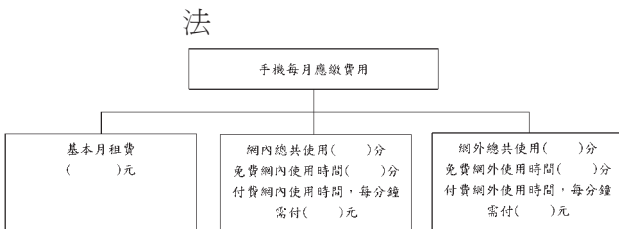
教育新知 >>>

是單元的最後一堂課，設計一題Jump題去挑戰學生的思考，挑戰學生運用既有的數學概念來解決老師提供的Jump題。以下分別就不同的單元來說明伸展跳躍Jump題的教學

一、「分數的除法」單元

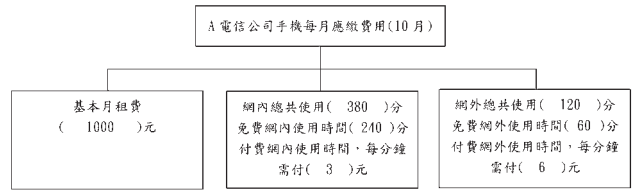
分數除法的題目基本上都是人為的，其題目的情境較難與生活結合。當教學者再苦思Jump題要如何設計時，筆者就想到102年11月28日曾到日本茨城縣牛久市立牛久南中學參觀的一節國中「一次函數」的數學課，那位金子仁老師讓學生計算五家電信公司的通話費率的Jump題。於是筆者就想把分數除法的Jump題設計成學生最有感和最有興趣的手機題目，就開始搜集國內幾家電信業者的費率來做佈題的思考，並與柏羽主任共同備課與設計Jump題，再經柏羽主任公開課的試教（林柏羽，2015），筆者就依據觀課和議課後的建議修改成以下4個的佈題，以進行另外一次的公開課（張文斌，2015）：

佈題一：閱讀及說出手機每月應繳費用之算法

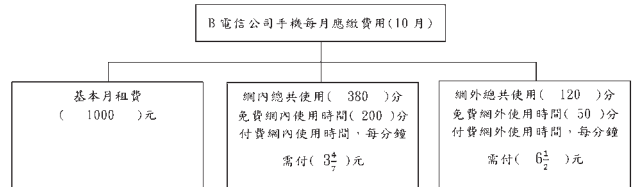


數學的學習不能只有公式的記憶與機械化練習的解題，尚需要對數學問題進行關係性的理解，包含對自己的解題歷程和結果都能提出合理的解釋（林文生、鄔瑞香，1999）。這樣的解題歷程亦與數學教育大師Polya（蔡坤憲譯，2006）所提之了解問題、擬定計畫、執行計畫、驗算與回顧之四大解題步驟相符。本題每月手機應繳費用圖表之非例行性題目，更可讓學生進行更多數學解題的關聯性理解。

佈題二：A電信公司基本月租費、網內及網外使用情形如下表，請問小華需付A電信公司多少錢？

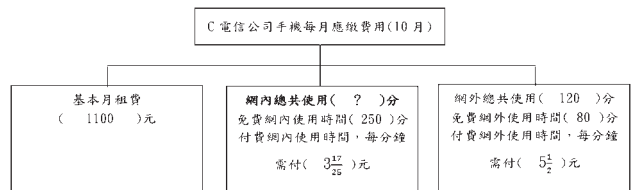


理解圖表內手機費用的計算是由基本月租費加上網內和網外付費的費用總和是關鍵，尤其網內和網外的費用計畫要先扣除免費的網內或網外使用時間，這樣的費用才算有優惠。此題只是在處理整數的四則計算。佈題三：B電信公司基本月租費、網內及網外使用情形如下表，請問A電信公司和B電信公司哪一家較便宜？



本題承前二題的基礎，題目的類型是相同的，只是數字加入帶分數，讓學生熟悉分數乘法的計算。但是學生若有敏銳的觀察力，其實不用實地計算B電信公司，將二個圖表一起對照就可輕易發現A電信公司是比較便宜的，因為不管免費網內或網外的時間和超出免費網內或網外時間的費率都是B電信公司比A電信公司貴，其10月份的費用當然用眼睛做比較就可求出。

佈題四：小華為了找到比較便宜的電信公司，發現C電信公司跟A電信公司一樣都付了1780元的手機使用費，只知網外總共使用120分鐘，但不知網內使用幾分鐘，請問C電信公司跟A電信公司哪一家比較便宜（或划算）？



在學生解題的歷程中，我們發現有學生第一個算式就寫 $3\frac{17}{20} \div 250 = 920$ ，學生寫出

這個算式就表示他還不懂免費網內使用時間250分鐘和每分鐘超過網內時間需付 $3\frac{17}{25}$ 元是沒有除法的關係。

另有一位學生寫出以下幾個式子： $120-80=40$ ， $40 \times 5\frac{1}{2}=220$ ， $1780-(1100+220)=460$ ， $460-250=210$ ，……。當學生寫出 $460-250=210$ 也表示學生搞不清楚460的單位是元還是分。

這個學生比較厲害，他依序寫出 $120-80=40$ ， $40 \times 5\frac{1}{2}=220$ ， $1780-220=1560$ ， $1560-1100=460$ ， $460 \div 3\frac{17}{25}=125$ ，學生雖寫出A電信公司比較便宜，但少寫 $125+250 < 380$ ，不過此位學生已很難得可以先算出答案。

在歷經幾次的討論後，最後有一位學生精簡算式寫出這樣的算式 $1780-1100-(120-80) \times 5\frac{1}{2}=460$ ， $460 \div 3\frac{17}{25}=125$ ， $125+250 < 380$ ，所以A電信公司比較便宜。

由以上可知，這樣的Jump題一出現，不管是學生和觀課的老師，都立即吸引他們的目光，因為這種非例行題的Jump題是可以考驗他們的讀題、題意的理解、數概念的處理是否正確。在下課前，由最後一位答對的同學上台解說他的想法和解法，學生也都不約而同發出「喔！」這其實就是我們走進伸展跳躍的數學教室中所要的師生協同學習！

二、「怎樣解題」單元

鄭雙慧老師在閱讀三個版本的「怎樣解題」單元發現三個版本的設計內容差異很大。所以，雙慧的Jump題設計是以H版為主，主題為「平均問題」、「植樹問題」、「年齡問題」、「雞兔問題」，並將參考K版的「年齡問題」將其加深加廣，並加入N版的「追趕問題」與「流水問題」來進行教學。以下即是雙慧老師最後一堂課的伸展跳躍Jump題：

2016國際少年運動會在今年7月11日於新北市板橋第一運動場舉行開幕典禮，其運

動場為一橢圓形跑道，每隔20公尺插一根旗子，共插了20根旗子，維維順時鐘繞6分鐘可走720公尺，凱凱逆時鐘繞4分鐘可走320公尺，假設兩人同時同地出發，請問：15分鐘後，兩人在跑道上相遇幾次？承上題，15分鐘後兩人相距幾公尺？（鄭雙慧，2016）

這種題目很長的數學伸展跳躍Jump題，也是近4年來瑞柑國小發展數學領域教學的特色。雖然題目又臭又長，但我們希望能將閱讀理解與數學解題結合，透過對題意的了解，培養學生耐心讀題和抓取訊息的能力。

但這麼難的題目，不是要嚇壞學生，而是要挑戰學生，因此，老師若能搭幾個鷹架和表徵工具，則學生的挑戰和學習就會更容易了！如跑道的圖要給學生而非純文字題，如此學生才能理解20根旗子要如何插才會了解運動場有多大，而且一次問2題很難，若能先問運動場一圈有幾公尺？2個人1分鐘相距多少公尺？順時針和逆時針有何不同？2人相遇是在第幾分鐘發生？學生的解題就更順暢了。

日本東京大學秋田喜代美教授在雙慧老師公開課後的議課中也表示：「日本數學課的教學也大致分成操作、協同與表現三階段，與雙慧老師的教學有異曲同工之妙。瑞柑國小透過教科書三個版本的分析後再設計Jump題，非常不錯！因為Jump題如何產生，對日本老師來說也是有很大的問題與挑戰！」

的確，Jump題的設計也是在考驗老師的教學專業，它不是只有超出共有課題的教科書程度，而是要有鷹架策略和學生學習心理學的考量，學生才能勇於面對伸展跳躍Jump題的挑戰。

三、「速率」單元

伸展跳躍Jump題，不只是讓學生挑戰超越教科書程度的課題，有時還是可提供學生多認識及瞭解生活世界的知識。以周偉翔老

師在106年3月22日的公開課中，他的伸展跳躍Jump題就這樣設計：「獵豹是目前陸地上跑最快的動物，獵捕動物時的速率約120公里/時；而土撥鼠是陸地上的挖洞高手，約20秒鐘的時間便能挖出一個讓自己躲藏的洞穴。已知獵豹與土撥鼠相距1公里，若獵豹開始獵捕時，土撥鼠同時開始挖洞躲藏，請問土撥鼠能成功逃脫嗎？」（周偉翔，2017）。

因為這一題Jump，除了讓學生處理二種動物移動的速率外，還有方向不同的追趕，更重要的是也讓學生算數學之外，也能知道世界上跑得最快的動物是獵豹，最會挖洞的高手是土撥鼠，以擴展學生的生活視野，而非反覆思考無聊的數學題目。

偉翔老師出這一題Jump的目的在希望學生能理解題意，進而找出題目的關鍵線索、並會進行距離單位和時間單位的換算，最後能理解不同做法的思考邏輯與計算步驟。而且偉翔老師在上課前只預計學生可能只有計算獵豹20秒可以移動多少公里來解題：

像小竹的計算方式： $120 \div 60 \div 60 = \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3} \times 20 = \frac{2}{3}$ ， $\frac{2}{3} < 1$ ，獵豹20秒只跑了 $\frac{2}{3}$ 公里，當然無法抓到土撥鼠；小翔的計算方式是 $120\text{km} = 120000\text{m}$ ， $120000 \div 60 \div 60 = 33\frac{1}{3}$ ， $< 33\frac{1}{3} \times 20 = 666\frac{2}{3}$ ， $666\frac{2}{3} < 1000$ ，獵豹20秒只跑了 $666\frac{2}{3}$ 公尺，當然無法抓到距離1公里外的土撥鼠。這是用獵豹和土撥鼠在時間內移動多少距離來解題。但沒想到班上竟有學生用距離 \div 速率=時間的思考來解題，他的計算方式為 $1 \div (120 \div 60 \div 60) = 30$ ， $20\text{秒} < 30\text{秒}$ ，所以土撥鼠可以成功脫逃獵豹的追捕，當小儒這樣的思考與計算方式，也讓這一題有多元的解題方式出現，更讓現場觀課的老師讚嘆不已。由此可知，伸展跳躍Jump題不僅在激發數學思考，也是在激盪多元的解題模式。

結語

綜合以上伸展跳躍Jump題的設計與教學，我們可以發現Jump題可以激發學生挑戰數學的動機，透過生活化的佈題與做數學（doing math）吸引學生進入學習與理解數學概念、強調數學思考的解題策略與教師自我調整的省思紀錄來幫助學生學習、有效學習，這種Jump的教學值得推廣，也是創新教學的一種可行策略。

參考文獻

- 周偉翔（2017）。學習共同體教學觀摩六忠數學。新北市瑞芳區瑞柑國民小學學習共同體教學觀摩（106/03/22）。取自http://www.rges.ntpc.edu.tw/news/u_news_v2.asp?id=%7BC3F74257-AB29-4D47-A310-E354AF4B52BF%7D&newsid=3092&PageNo=1&keyword=
- 林文生（2005）。資訊科技發展對於課程改革的影響。北縣教育，50，32-37。
- 林文生、鄔瑞香（1999）。另類教與學：數學教育的藝術與實務。臺北：心理。
- 林柏羽（2015）。學習共同體教學觀摩六忠數學。新北市瑞芳區瑞柑國民小學學習共同體教學觀摩（104/10/28）。取自http://www.rges.ntpc.edu.tw/news/u_news_v2.asp?id=%7BC3F74257-AB29-4D47-A310-E354AF4B52BF%7D&newsid=2381&PageNo=1&keyword=
- 張文斌（2015）。學習共同體教學觀摩六忠數學。新北市瑞芳區瑞柑國民小學學習共同體教學觀摩（104/11/04）。取自http://www.rges.ntpc.edu.tw/news/u_news_v2.asp?id={C3F74257-AB29-4D47-A310-E354AF4B52BF}&newsid=3087&PageNo=4&keyword=
- 黃郁倫（譯）（2013）。學習共同體—構想與實踐（原作者：佐藤學）。臺北市：天下雜

誌。

黃郁倫、鐘啟泉（譯）（2012）。學習的革命：從教室出發的改革（原作者：佐藤學）。臺北市：天下雜誌。

蔡坤憲（譯）（2006）。怎樣解題（一版）。（原作者：G. Polya, 1957）。臺北市：天下遠見。（原著出版年：1957）

鄭雙慧（2016）。學習共同體教學觀摩六忠數學。新北市瑞芳區瑞柑國民小學學習共同體教學觀摩（2016/04/22）。取自http://www.rges.ntpc.edu.tw/news/u_news_v2.asp?id={C3F74257-AB29-4D47-A310-E354AF4B52BF}&newsid=2561&PageNo=2&keyword=

陳癸伶（2015）。學習共同體教學觀摩六忠數學。新北市瑞芳區瑞柑國民小學學習共同體教學觀摩（2015/10/28）。取自http://www.rges.ntpc.edu.tw/news/u_news_v2.asp?id=%7BC3F74257-AB29-4D47-A310-E354AF4B52BF%7D&newsid=2380&PageNo=1&keyword

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.